TEORIA DELL'IDENTIFICAZIONE SET MEMBERSHIP

Michele TARAGNA

Dipartimento di Automatica e Informatica
Politecnico di Torino

Corso di III Livello
"Experimental modeling:
costruzione di modelli da dati sperimentali"

Problema di stima IBC

- Assegnati:
  - λ: elemento del problema, *non noto*, es. $\left[\begin{array}{l}\text{sistema dinamico}\\ \text{funzione del tempo}\end{array}\right.$
  - S: operatore soluzione, *noto*, es. $\left[\begin{array}{l}\text{parametri del sistema dinamico}\\ \text{valori della unzione del tempo}\end{array}\right.$
- Informazioni disponibili:
  - informazione di misura (informazione "a posteriori")

$$\underbrace{y^N}_{\substack{\text{dati}\\ \textit{noti}}} = \underbrace{F(\lambda)}_{\substack{\text{funzione}\\ \textit{nota}}} + \underbrace{e^N}_{\substack{\text{rumore}\\ \textit{non noto}}}$$

F: operatore informazione, *noto*

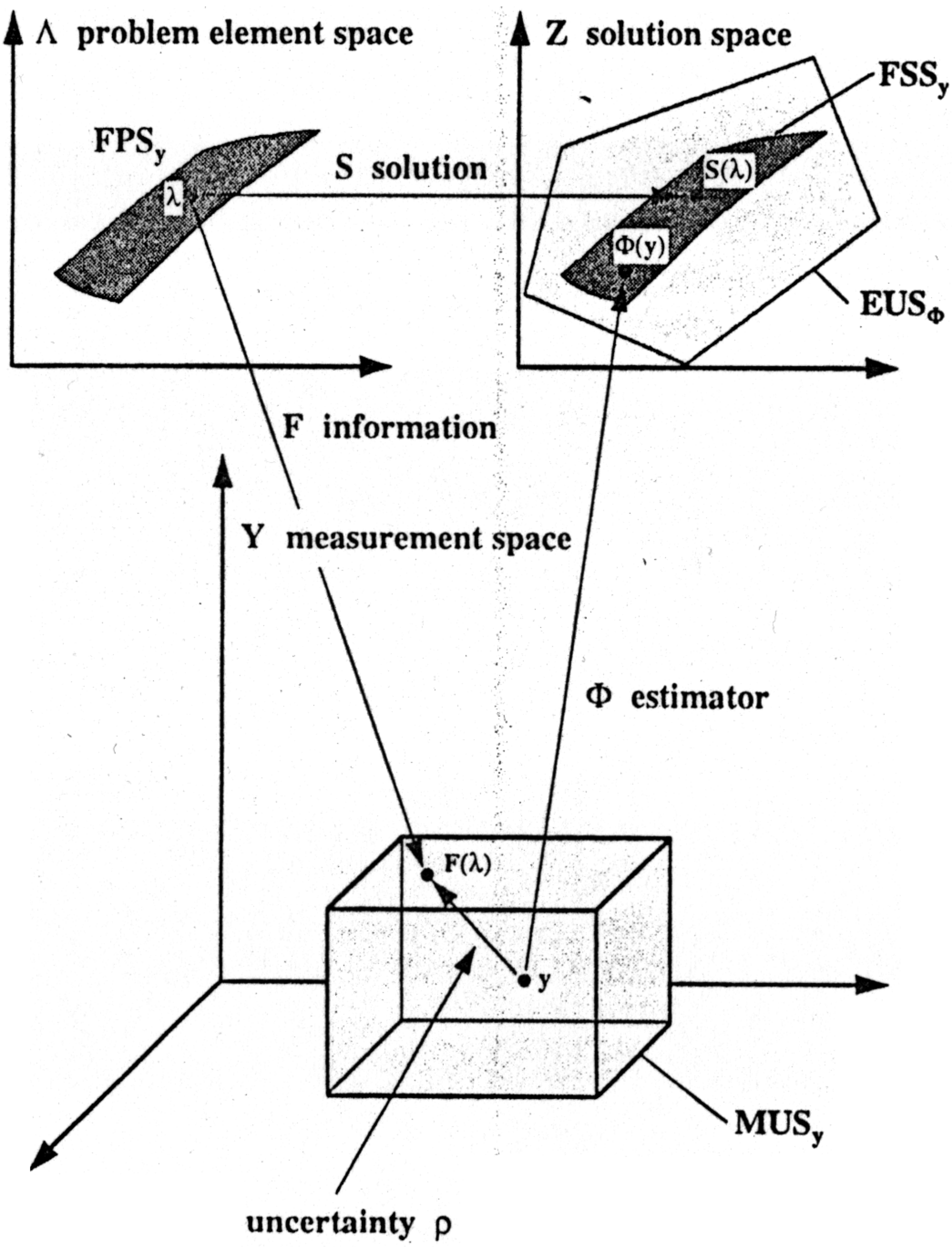
  - informazioni "a priori"

    sull'elemento del problema: $\lambda \in K \subseteq \Lambda$

    sul rumore di misura: $e^N \in \mathcal{B}_e = \left\{ e^N \in \Re^N : \|e^N\| \leq \varepsilon \right\}$
- Problema di stima:
  1. trovare un algoritmo di stima ϕ che meglio approssimi $S(\lambda)$

$$\phi\left(y^N\right) = \hat{z} \approx S(\lambda)$$

  2. valutare la bontà di tale approssimazione



$$\begin{aligned} \lambda &: \text{ elemento del problema} \in K \\ S(\lambda) &: \text{ funzione di } \lambda \text{ da stimare} \\ F(\lambda) &: \text{ informazione di misura ``esatta''} \\ e^N &: \text{ rumore di misura} \in \mathcal{B}_e \\ \phi\left(y^N\right) &: \text{ approssimazione di } S(\lambda) \end{aligned}$$

Esempio: stima dei parametri di un modello $\mathbf{ARX}\,(\mathbf{n_a}, \mathbf{n_b})$

$$y_j = \sum_{i=1}^{n_a} a_i y_{j-i} + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u_{j-i} + e_j, \quad j = 1, \ldots, N'$$

- Λ : spazio $(n_a + n_b)$-dimensionale con elementi

$$\lambda = \left[\, a_1 \;\; a_2 \;\; \cdots \;\; a_{n_a} \;\; b_1 \;\; b_2 \;\; \cdots \;\; b_{n_b} \,\right]^T \in \Re^r, \quad r = n_a + n_b$$

- Z : spazio $(n_a + n_b)$-dimensionale con elementi

$$z = \lambda$$

$$\Downarrow$$

$$Z \equiv \Lambda$$

- $S = I =$ operatore identità
- Y : spazio $(N' - n_a)$-dimensionale con elementi

$$y = \left[\, y_{n_a+1} \;\; y_{n_a+2} \;\; \cdots \;\; y_{N'} \,\right]^T \in \Re^N, \quad N = N' - n_a$$

- $F(\lambda) = L \cdot \lambda$, con $L = \begin{bmatrix} y_{n_a} & \cdots & y_1 & u_{n_a} & \cdots & u_{n_a+1-n_b} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N'-1} & \cdots & y_{N'-n_a} & u_{N'-1} & \cdots & u_{N'-n_b} \end{bmatrix} \in \Re^{N \times r}$

$\Rightarrow F\,(\lambda)$ è *lineare* in λ

Principali insiemi d'interesse

- MUS_y : **Measurement Uncertainty Set**

$$MUS_y = \{\tilde{y} \in Y : ||\tilde{y} - y|| \leq \varepsilon\}$$

- EUS_ϕ : **Estimate Uncertainty Set**

$$EUS_\phi = \phi\,(MUS_y)$$

  – EUS_ϕ dipende ovviamente dall'algoritmo di stima ϕ
  – EUS_ϕ fornisce tutte le stime di $S\,(\lambda)$ che possono essere ottenute considerando tutte le possibili misure consistenti con tutte le informazioni disponibili

- FPS_y : **Feasible Problem Element Set**

$$FPS_y = \{\lambda \in K : ||y - F\,(\lambda)\,|| \leq \varepsilon\}$$

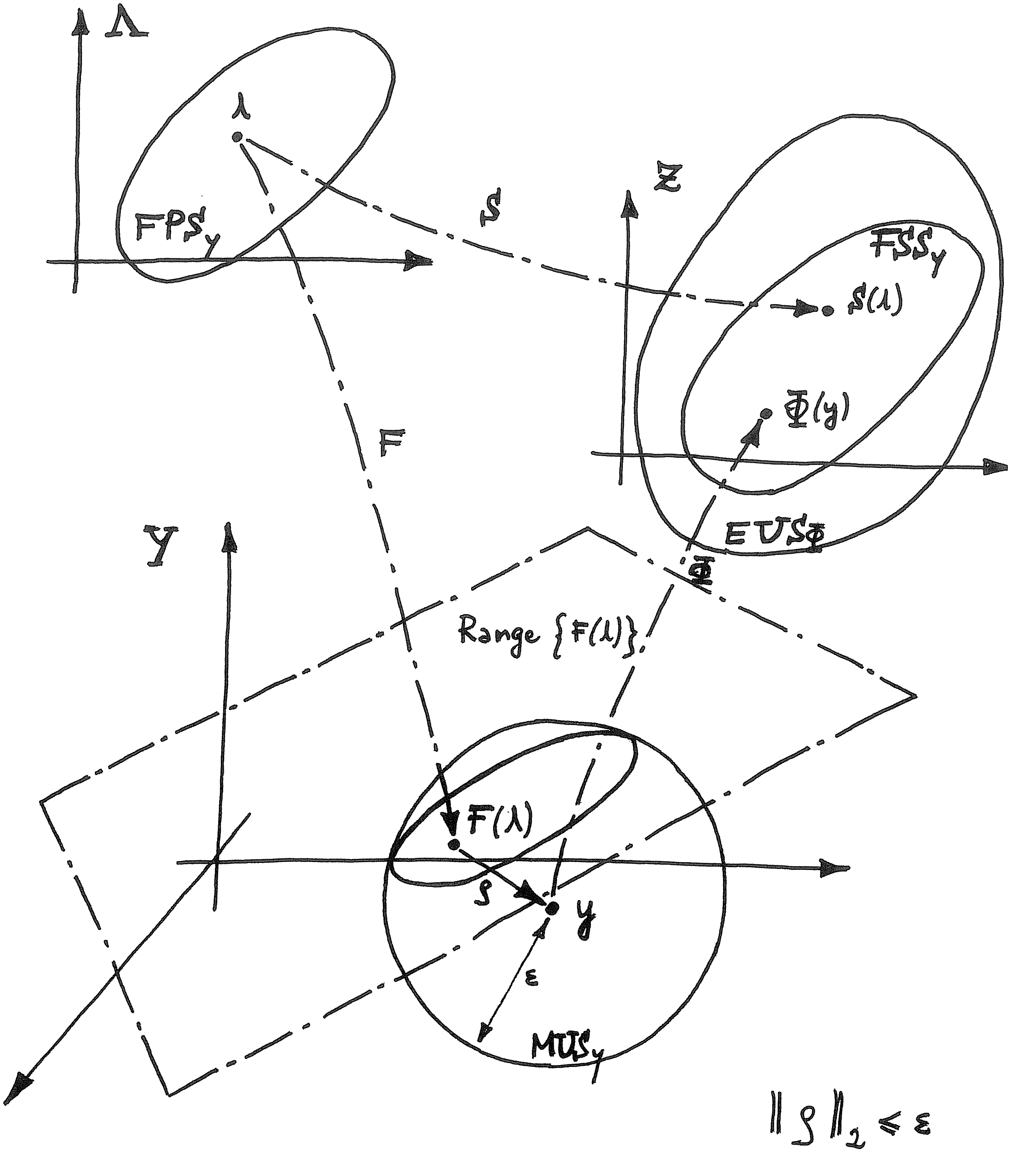
- FSS_y : **Feasible Solution Set**

$$FSS_y = S(FPS_y)$$

  – FSS_y dipende solo dalla formulazione del problema
  – FSS_y fornisce tutti i possibili valori di $S\,(\lambda)$ consistenti con tutte le informazioni disponibili
  – Nel caso di stima parametrica, $S\,(\lambda) = \lambda$

$$\Downarrow$$

$FPS_y \equiv FSS_y$: **Feasible Parameter Set**



Λ
λ
FPS_y
S
Z
FSS_y
S(λ)
Φ(y)
F
EUSΦ
Φ
Y
Range {F(λ)}
F(λ)
ρ
y
ε
MUS_y
‖ρ‖₂ ≤ ε

Errori e concetti di ottimalità

- $E_y(\phi)$: **Errore locale**

$$E_y(\phi) = \sup_{\lambda \in FPS_y} \| S(\lambda) - \phi(y) \| = \sup_{S(\lambda) \in FSS_y} \| S(\lambda) - \phi(y) \|$$

- $E(\phi)$: **Errore globale**

$$E(\phi) = \sup_{y \in Y} E_y(\phi)$$

- Gli algoritmi di stima (stimatori) che minimizzano tali errori sono detti rispettivamente
  - localmente ottimi
  - globalmente ottimi

- Ottimalità locale $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}$ Ottimalità globale

CLASSES OF ESTIMATORS

1) CENTRAL estimators

$$\Phi^c(y) = \text{Chebicheff center of } FSS_y$$

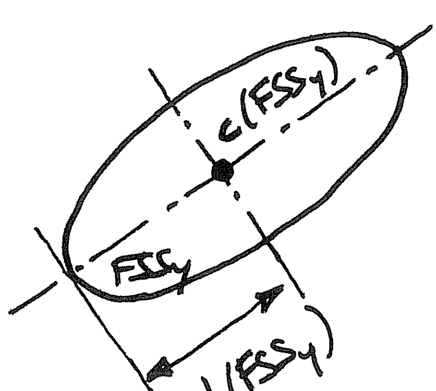
$$\triangleq c(FSS_y) \in Z$$

is the center of the minimal ball containing FSS_y

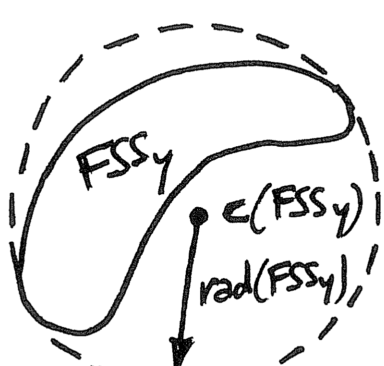
$$\text{rad}(FSS_y) \triangleq \sup_{z \in FSS_y} \| c(FSS_y) - z \| =$$

$$= \inf_{\tilde{z} \in Z} \sup_{z \in FSS_y} \| \tilde{z} - z \|$$

FSS_y: ellipsoid



FSS_y: not convex



2) <u>CORRECT estimators</u>

$$\Phi(F(\lambda)) = S(\lambda) \qquad \forall \lambda \in \Lambda$$

give exact solution if applied to exact info

- <u>projection estimators</u>

$$\Phi^{P}(y) = S(\lambda_y), \qquad \lambda_y \in \Lambda \text{ s.t.}$$

$$\| y - F(\lambda_y) \| = \inf_{\lambda \in \Lambda} \| y - F(\lambda) \|$$

- $\exists \neq$ projectors estimators according to the norm used in $\mathcal{Y}$:
  - ℓ_2 $\left[\|y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |y_i|^2} \right] \rightarrow$ Least Squares Algorithms Φ^{LS}
  - ℓ_1 $\left[\|y\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |y_i| \right] \rightarrow$ Least Absolute Values Algo
  - ℓ_∞ $\left[\|y\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} |y_i| \right] \rightarrow$ Least Maximum Values Algo [Minimax Algo]

Estimator Properties for
LINEAR Problems $\left[\begin{array}{l} S(\lambda) \rightarrow S_N \cdot \lambda \\ F(\lambda) \rightarrow F_N \cdot \lambda \end{array}\right]$

- CORRECT estimators

$$FSS_y \subseteq EUS_\Phi \quad \forall y \in Y$$

[Milanese - Belforte, '82]

- PROJECTION estimators
  - "Almost" local optimality

$$E_y(\Phi^p) \leq 2\, rad(FSS_y) \leq 2\, E_y(\Phi),$$

$$\forall y \in Y, \quad \forall \Phi$$

[Kacewicz - Milanese - Tempo - Vicino, '86]

- LEAST SQUARES estimators
  - Linearity (by construction)

    $$\Phi^{LS}(y) = (F_N^T F_N)^{-1} F_N^T y$$

  - Correctness (by definition) $\Rightarrow$

    $$FSS_y \subseteq EUS_{\Phi^{LS}}, \qquad \forall y \in Y$$

  - if Y is ℓ_2 - NORMED
    - Centrality: $\Phi^{LS}(y) = c(FSS_y)$
    - Local Optimality: $E_y(\Phi^{LS}) \leq E_y(\Phi)$,

      $\forall y \in Y, \ \forall \Phi$

[Kacewicz - Milanese - Tempo - Vicino, '86]

Basic IBC-SM results

CONVERGENCE CONCEPTS

- ϕ is *convergent* if:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} E_y(\phi) = 0, \quad \cancel{\forall x \in K} \quad \forall y$$

- ϕ is *globally convergent* if:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} E(\phi) = 0$$

global convergence $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ convergence